

Cours 5:

Problème parabolique transitoire 1D et 2D
et éléments finis

Problème parabolique 1D et éléments finis

Considérons un barreau métallique de longueur L et dont les deux extrémités sont en contact avec des réservoirs de chaleur de température constante égale à 0°C . Supposons que ce barreau occupe l'intervalle $[0, L]$ de l'axe Ox et qu'au temps $t = 0$ sa température soit connue en tout point $x \in]0, L[$ et égale à $w(x)$, $x \in]0, L[$. Supposons en outre avoir placé sous le barreau une source de chaleur $f(x, t)$, donnée. La quantité $f(x, t)$ représente la puissance par unité de longueur fournie au point $x \in]0, L[$ et à l'instant $t > 0$.

La température $T = u(x, t)$ est alors donnée par l'équation de la chaleur:

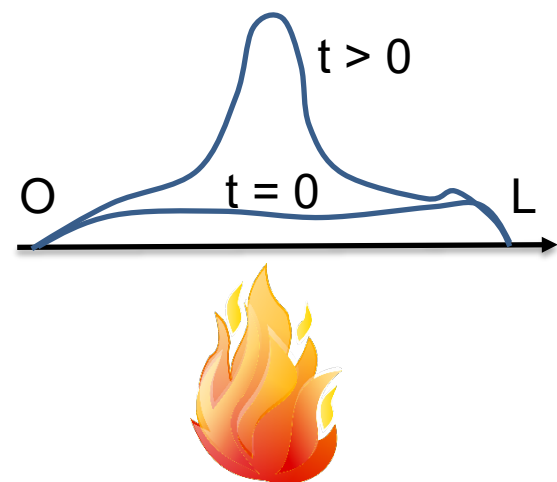
$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0. \quad (12.1)$$

A cette équation on adjoint les *conditions aux limites* :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad (12.2)$$

et la *condition initiale* :

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in]0, L[. \quad (12.3)$$



Problème parabolique 1D et éléments finis

Nous prenons $\rho c_p = 1$ et $L = 1$ et cherchons la fonction $u(x,t)$ satisfaisant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x,t) & \forall x \in]0,1[, \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) &= w(x) & \forall x \in]0,1[.\end{aligned}$$

Solution par la **méthode des différences finies**: soit N un entier positif,

Nous posons $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour $i = 0$ à $N+1$ et $u_i(t)$ une approximation de $u(x_i,t)$.

Le schéma en différences finies s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_i(t) + \frac{k}{h^2} \left(-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t) \right) &= f(x_i, t) \\ & i = 1, \dots, N, \quad \forall t > 0 \\ u_0(t) = u_{N+1}(t) &= 0 & \forall t > 0, \\ u_i(0) &= w(x_i) & i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Les fonctions $u_i(t)$, $i=1$ à N , sont les inconnues du pb.

Problème parabolique 1D

Nous obtenons une semi-discrétisation en espace du pb de la chaleur.

Si A est la $N \times N$ matrice tridiagonale définie par

$$A = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

si $\vec{u}(t)$ est le N -vecteur de composantes $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, si $\vec{f}(t)$ est le N -vecteur de composantes $f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_N, t)$ et si $\vec{w}$ est le N -vecteur de composantes $w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_N)$,

Le schéma différentiel s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w}, \end{aligned}$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler progressif:
$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) & \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w},\end{aligned}$$

Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné, soit $t_n = n\tau$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$, et soit $\vec{u}^n$ une approximation de $\vec{u}(t)$ au temps $t = t_n$; nous noterons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$.
Considérons le schéma :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.13)$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w}. \quad (12.14)$$

Clairement, nous avons

$$\vec{u}^{n+1} = (I - \tau A)\vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.15)$$

où I est la $N \times N$ matrice identité; le vecteur $\vec{u}^{n+1}$ peut être calculé explicitement à partir du vecteur $\vec{u}^n$. Ainsi, à partir de $\vec{u}^0 = \vec{w}$, on peut calculer de proche en proche $\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3, \dots$, en utilisant (12.15); la j -ème composante u_j^n de $\vec{u}^n$ est une approximation de $u(x_j, t_n)$, $j = 1, \dots, N$, $n \geq 0$. Le schéma numérique (12.13) (12.14) est **une discrétisation** (complète) du problème (12.4) (12.5) (12.6) par la méthode des différences finies.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler progressif:

Comme dans la section 9.3, une *condition de stabilité* limite le choix du pas temporel τ . Cette limitation est fonction du pas spatial et est exprimée par la condition :

$$\tau \leq \frac{h^2}{2k}. \quad (12.16)$$

longueur de diffusion pdt τ : $\sqrt{2D\tau}$ avec $D = \frac{k}{\rho C_p} = k$ ici car $\rho C_p = 1$

condition de stabilité: $\sqrt{2k\tau} \leq h$ soit $\tau \leq \frac{h^2}{2k}$, i.e la longueur de diffusion

de la chaleur pendant τ doit rester inférieure au pas d'espace h .

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler rétrograde:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w},\end{aligned}$$

La dérivée temporelle est prise en t_{n+1} :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^{n+1} + \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ou, de façon équivalente

$$(I + \tau A)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La matrice $I + \tau A$ est tridiagonale et définie positive: on la décomposera par la méthode de Cholesky.

Ce schéma est implicite (il faut faire une inversion de matrice) mais inconditionnellement stable. La résolution en temps dans Abaqus se fait en schéma implicite.

NB: on peut aussi utiliser des schémas mixtes ou de Runge-Kutta.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Eléments finis 1D: formulation faible

On travaille sur $[0,1]$ puisque $L = 1$.

On multiplie par une fonction $v(x)$ à dérivée continue par morceaux sur $[0,1]$ et vérifiant $v(0)=v(1)=0$ (e.v V) puis on intègre de 0 à 1:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx - \int_0^1 k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) v(x) dx = \int_0^1 f(x, t) v(x) dx.$$

On utilise une intégration par parties du second terme pour obtenir **la formulation faible** du pb:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx + \int_0^1 k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) v'(x) dx = \int_0^1 f(x, t) v(x) dx$$

On cherche donc $u(x,t)$ telle que pour tout v de V (de dimension infinie), l'équation ci-dessus soit vérifiée.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Eléments finis: approximation de Galerkin

On considère le sous espace vectoriel V_h de V engendré par les N fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ pour obtenir l'approximation de Galerkin: trouver $u_h(x,t)$ de V_h (de dimension finie) telle que pour tout v_h de V_h :

$$\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t) v_h(x) dx + \int_0^1 k \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,t) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x,t) v_h(x) dx$$

avec la condition initiale $u_h(x,0) = w_h(x)$ où $w_h(x)$ est l'approximation de $w(x)$ dans V_h .

Nous développons $u_h(x,t)$ dans la base V_h : $u_h(x,t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x)$

L'équation ci-dessus doit être vérifiée pour tout $v_h(x)$ de V_h i.e. pour tous les φ_j :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^N u_i(t) \int_0^1 k \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \\ = \int_0^1 f(x,t) \varphi_j(x) dx \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Que l'on réécrit sous la forme matricielle: $M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0.$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Éléments finis: matrices de rigidité et de masse

Si A est la $N \times N$ matrice de coefficients

$$A_{ji} = \int_0^1 k \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \quad (12.30)$$

(A est appelée *matrice de rigidité*), si M est la $N \times N$ matrice de coefficients

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (12.31)$$

(M est appelée *matrice de masse*), si $\vec{u}(t)$ est le N -vecteur de composantes $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ et si $\vec{f}(t)$ est le N -vecteur dont la j -ème composante est

$$f_j(t) = \int_0^1 f(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad (12.32)$$

alors les relations (12.29) sont équivalentes à chercher $\vec{u}(t)$ tel que

$$M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0. \quad (12.33)$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Eléments finis: traitement de la C.I.

la solution initiale $u(x,0)=w(x)$ est projetée sur la base de V_h et devient $w_h(x)$:

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x).$$

Si $\vec{w}$ est le N -vecteur de composantes $w_1, \dots, w_N$, alors la condition initiale du système différentiel (12.33) est définie par :

$$\vec{u}(0) = \vec{w}. \quad (12.34)$$

Nous avons donc obtenu une ***semi-discrétisation*** spatiale du problème (12.4) (12.5) (12.6). Il est facile de vérifier que les matrices M et A sont des $N \times N$ matrices symétriques définies positives. Le système différentiel (12.33) est équivalent à

$$\dot{\vec{u}}(t) = -M^{-1}A\vec{u}(t) + M^{-1}\vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \quad (12.35)$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Discretisation spatiale par la méthode des éléments finis

- on définit concrètement une base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de type éléments finis comme nous l'avons fait dans la section 10.4 et on construit les matrices M , A et le vecteur $\vec{f}$;
- en supposant la condition initiale w continue sur $[0, 1]$, on construit w_h en interpolant w par des polynômes de degré 1 sur chaque élément géométrique (sect. 1.6) ;
- on détermine une approximation $\vec{u}^n$ de $\vec{u}(t_n)$ en utilisant un schéma d'Euler progressif ou rétrograde comme dans (12.13) ou (12.17).

La résolution temporelle peut être réalisée par un schéma d'Euler progressif:

$$M \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n)$$

ou, de façon équivalente

$$M\vec{u}^{n+1} = (M - \tau A)\vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_n),$$

où τ est le pas de temps et $t_n = n\tau$.

M n'étant pas diagonale, il faut l'inverser: le schéma progressif n'est pas explicite.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Mass lumping sur la matrice M

Pour le rendre explicite, il faut calculer concrètement la matrice de masse M en utilisant la formule de quadrature des trapèzes. Ainsi, nous obtenons en utilisant la formule (10.24) avec $c = 1$:

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \simeq L_h(\varphi_i \varphi_j) = \begin{cases} h & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ce procédé consiste à approcher la matrice de masse M par une matrice diagonale (on parle ici de *mass lumping*) et donc à rendre explicite le schéma d'Euler progressif.

Mass lumping sur la matrice M : sommer tous les termes d'une ligne i sur M_{ii} et rendre ainsi M diagonale (acceptable si les $M_{ij, j \neq i}$ sont très petits devant les M_{ii})

$$M_{ii} \leftarrow \sum_{j=1}^N M_{ij}$$

Exo 5a : calculer exactement M_{ii} et $M_{i,i+1}$ pour des fonctions chapeaux linéaires 1D et appliquer le mass lumping sur la matrice M .

Problème parabolique 1D et éléments finis

La résolution temporelle par un schéma mixte:

$$M\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0.$$

Eléments finis: schéma mixte de Crank-Nicholson, moyenne des schémas d'Euler progressif et rétrograde (d'ordre 2 en $\Delta t = \tau$)

$$M\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} + A\frac{\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^n}{2} = \frac{\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)}{2},$$

ou, de façon équivalente

$$(M + \frac{\tau}{2}A)\vec{u}^{n+1} = (M - \frac{\tau}{2}A)\vec{u}^n + \frac{\tau}{2}(\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)). \quad (12.37)$$

Le schéma (12.37) est appelé *schéma de Crank-Nicholson* ; c'est un schéma numérique d'ordre 2, implicite, inconditionnellement stable (en norme quadratique !).

Problème parabolique 2D et éléments finis

Soit Ω un domaine polygonal dans le plan Ox_1x_2 , de frontière $\partial\Omega$ et soit $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Si $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont quatre fonctions de $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ données, si $f : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ et $w : x \in \overline{\Omega} \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ sont deux autres fonctions données, nous posons le problème de trouver une fonction $u : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) \right) = f(x, t)$$
$$\forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.38)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.39)$$

$$u(x, 0) = w(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (12.40)$$

La relation (12.39) est appelée *condition aux limites* alors que la relation (12.40) est appelée *condition initiale*.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Cas de la chaleur avec une conductivité thermique anisotrope:

$$A = \begin{pmatrix} k_{11}(x,t) & k_{12}(x,t) \\ k_{21}(x,t) & k_{22}(x,t) \end{pmatrix} \text{ avec } J = -A \nabla T = \text{flux de chaleur en W/m}^2$$

$$\text{équation de la chaleur: } \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(-[k] \nabla T) = f(x,t)$$

Cas où $A = I_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x,t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) &= w(x) & \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

Problème parabolique 2D et éléments finis

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega,\end{aligned}$$

Semi - discrétisation spatiale du pb parabolique en 2D qui mènera à un système différentiel en temps. On commence par définir $u_h(x, t)$ approximation de $u(x, t)$ sur la base des φ_i :

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0,$$

Puis on intègre par partie en utilisant la relation: $\operatorname{div}(v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} v \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} u + v \Delta u$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_j(x) dx \\ = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}$$

Problème parabolique 2D et éléments finis

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.41)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.42)$$

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (12.43)$$

On définit alors les matrices de masse M et de rigidité A et le vecteur f :

$$M_{ji} = \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad A_{ji} = \iint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

$$f_j(t) = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx.$$

Pour obtenir le système différentiel: $M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0,$

que l'on résoudra par des schémas temporels d'Euler (progressif ou rétrograde) ou de Cranck-Nicholson (schéma mixte).

Problème parabolique 2D et éléments finis

Exemple: pb parabolique suivant sur le carré unité Ω de frontière $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

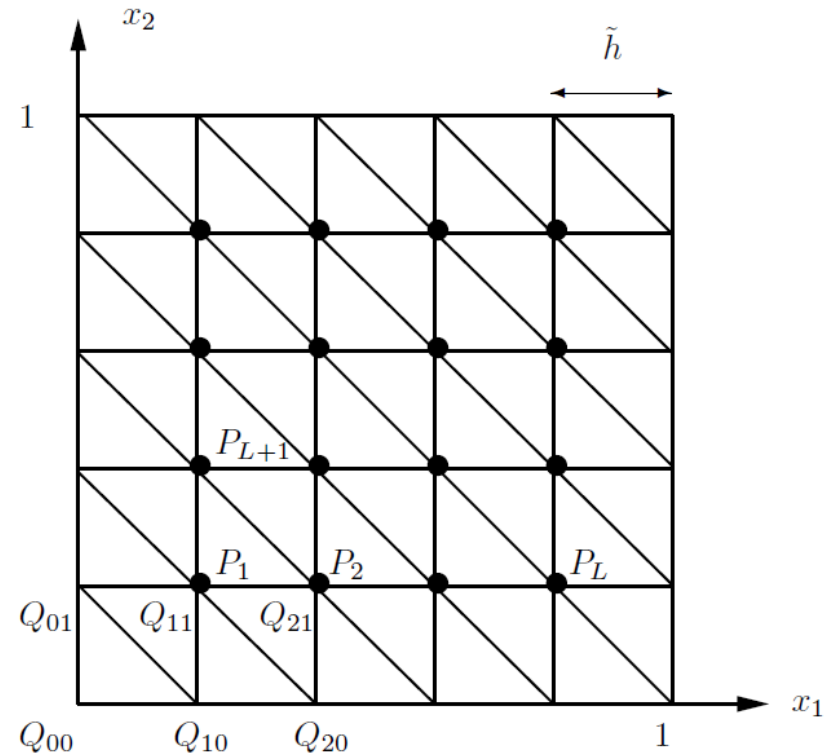


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour $L = 4$.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Triangulation τ_h et fonctions de base φ_i (fct linéaires par morceaux):
cf. cours 4 (pb elliptique 2D)

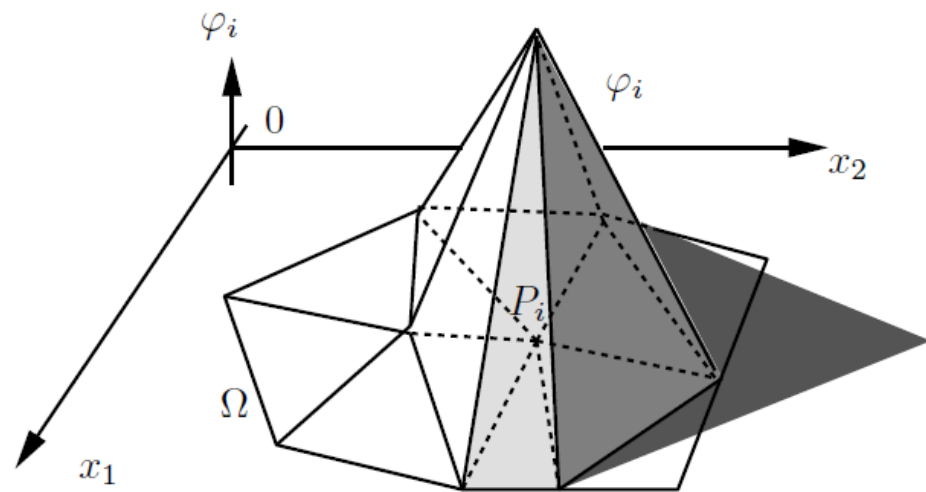


Fig. 11.3 La fonction de base φ_i .

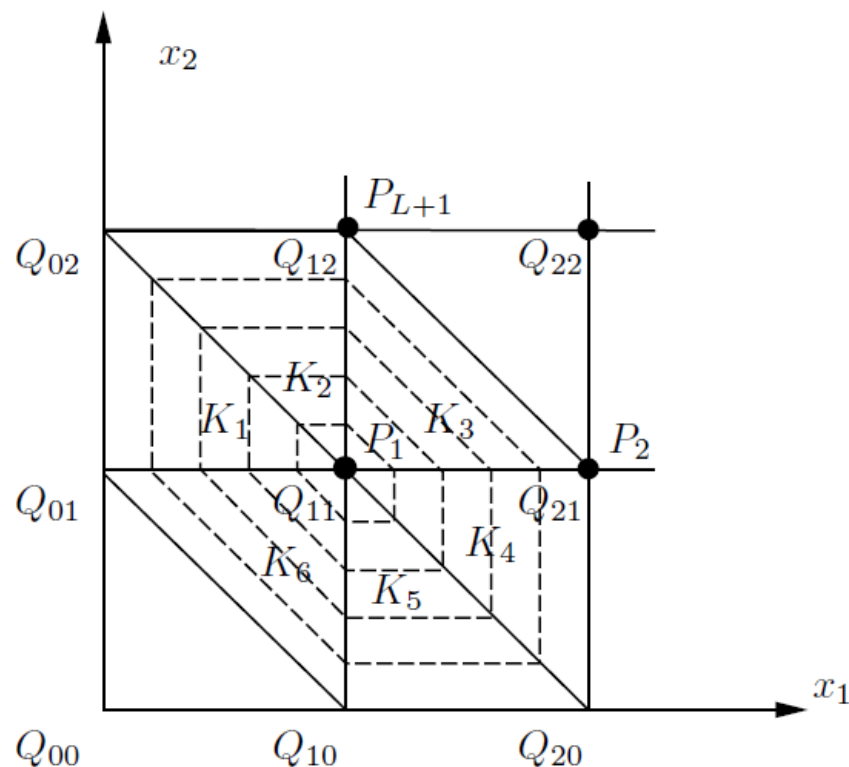


Fig. 11.5 Support et isovaleurs de la fonction de base φ_1 .

Problème parabolique 2D et éléments finis

La matrice de rigidité A , $A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV$, est nona-diagonale pour $L = 4$: cf. cours 4

$$A = \begin{bmatrix} B & C & & & \\ C & B & C & & \\ & C & B & C & \\ & & C & B & C \\ & & & C & B \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

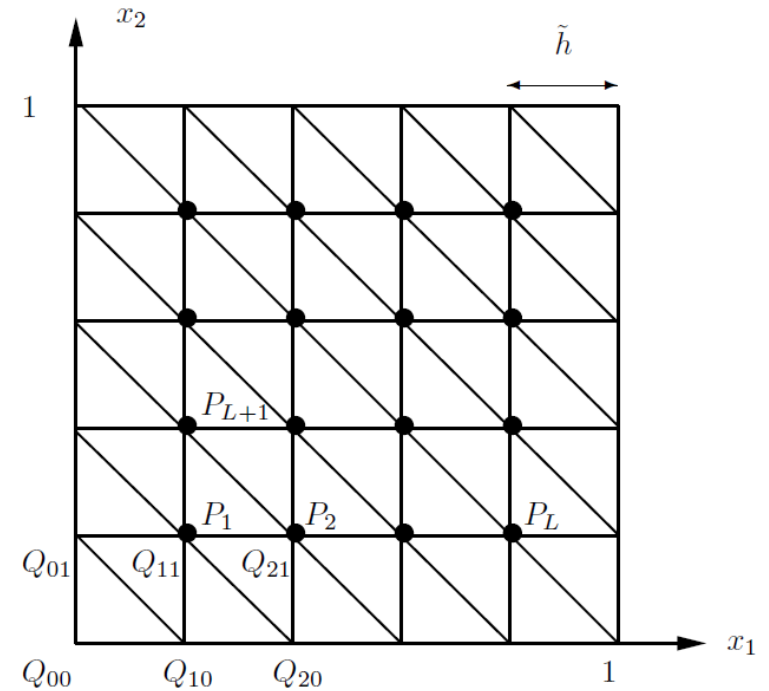


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour $L = 4$.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Matrice de masse M , $M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dV$ est nona-diagonale pour $L = 4$.

Sa demi-largeur de bande est 5.

$$M = \frac{\tilde{h}^2}{12} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} & & \\ \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & \\ & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} \\ & & \tilde{C}^T & \tilde{B} \end{bmatrix},$$

où nous avons noté

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 6 & 1 & \\ & 1 & 6 & 1 \\ & & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le mass lumping sur M donne: $M \approx h^2 I$

Exo 5b : montrer que M_{11} vaut $h^2/2$ ($\tilde{h} = h$) et M_{12} vaut $h^2/12$ pour $L = 4$.

Mercredi 16 Octobre: cours 6
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis 1D

Mercredi 30 Octobre: propé1 de 15h15 à 17h (aucun document), présence obligatoire (examen)
NB: 1/3 temps supplémentaire pour 4 étudiants

Mercredi 6 Novembre : correction du propé1